M 7 Grundwissen	Terme 1	$(a-b)^2$

1. Zum Termbegriff

Definition:
Ein ***Term mit einer Variablen*** ist ein Rechenausdruck mit einer Unbekannten/einem Platzhalter.

Beispiel: $f(x) = (x^2 + 7):4$

Beachte:

a) Erst wenn man die Variable in einem Term mit einer Zahl aus einer ***Grundmenge*** G belegt, erhält man den *Wert* des Terms.

Beispiel: G = **Q**

b) In der ***Definitionsmenge*** D sind alle Zahlen, die in den Term eingesetzt werden dürfen.

Beispiel: $T(x) = \frac{1}{x}$; D = **Q**\ $\{0\}$

c) Treten in einem Term verschiedene Variablen auf, dann dürfen diese mit verschiedenen oder mit der gleichen Zahl belegt werden. Tritt jedoch dieselbe Variable mehrmals in einem Term auf, so muss sie jeweils mit der selben Zahl belegt werden.

Beispiel:
$T(x) = x^2 - 3x$
$T(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 = 10$

2. Äquivalenzumformungen von Termen

Definition:
Zwei Terme $T_1(x)$ und $T_2(x)$, die bei allen Belegungen der Variablen mit Zahlen aus G jeweils den gleichen Wert annehmen, nennt man äquivalent (gleichwertig) in G.
Es gilt: $T_1(x) = T_2(x)$

Beispiel:
$T_1(x) = 3(x-2)$
$T_2(x) = 4x - (6+x)$
$T_1(x) = 3(x-2) = 4x - (6+x) = T_2(x)$

Merke:
Formt man einen Term nach einem gültigen Rechengesetz (KG, AG, DG) um, so geht er in einen ***äquivalenten*** Term über.
Derartige Umformungen nennt man ***Äquivalenzumformungen***.

Beispiel:
$\frac{t^2}{2} - 1 + \frac{1}{2}t^2 = t^2 - 1$
$a + b^2 - (3a + 5b) = a + b^2 - 3a - 5b^2 = -2a - 4b^2$

3. Zusammenfassen von Termen

Definition:
Summanden, die sich nur um Zahlenfaktoren unterscheiden, nennen wir ***gleichartig***.
Gleichartige Summanden können wir mit Hilfe des DG zusammenfassen.

Beispiel:
$3a + 4b - 2b - 4a = -a + 2b$

Beachte:
Bei einer Summe von Produkten werden zunächst die einzelnen Produkte vereinfacht. Dann werden die gleichartigen Summanden zusammengefasst.

Beispiel:
$3x^2 + 7y^3 - (5x)^2 - 4y^2 =$
$3x^2 + 7y^3 + 25x^2 - 4y^2 =$
$28x^2 + 7y^3 - 4y^2$

M 7 Grundwissen	Terme 2	$(a-b)^2$

4. Multiplikation von Summen

Merke:
Zwei Summen werden multipliziert, indem jeder Summand des ersten Faktors mit jedem Summanden des zweiten Faktors multipliziert und die Produkte addiert werden.

$(a+b)\cdot(c+d) = ac + ad + bc + bd$

Beispiel:
$(2x+3y)(3-4x) = 6x - 8x^2 + 9y - 12xy$

5. Die binomischen Formeln

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2\\(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2\\(a+b)(a-b) &= a^2 - b^2\end{aligned}}$$

Beispiele:
$(c^2+7)^2 = c^4 + 14c^2 + 49$

$(1-a^2x)^2 = 1 - 2a^2x + a^4x^2$

$(2f-3g)(2f+3g) = 4f^2 - 9g^2$

6. Faktorisieren von Summen

Viele Summen lassen sich durch Ausklammern oder mit Hilfe der binomischen Formeln in äquivalente Produkte umformen, die als Terme einfacher sind oder deren Werte sich in wenigen Schritten berechnen lassen:

(1) ***Ausklammern***:
$ab + ac - ad = a\cdot(b+c-d)$

Beispiele:
$5\cdot3 + 5\cdot4 - 5\cdot6 = 5\cdot(3+4-6) = 5\cdot1 = 5$

(2) ***Wiederholtes Ausklammern***:
$ab + db - ca - cd = (a+d)b - (a+d)c =$
$(a+d)(b-c)$

$12\cdot27 + 18\cdot27 - 17\cdot12 - 17\cdot18 =$
$27\cdot(12+18) - 17(12+18) =$
$(12+18)(27-17) = 30\cdot10 = 300$

(3) *Anwendung einer binomischen Regel*:
$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

$\frac{1}{9}a^2 + \frac{2}{3}a + 1 = \left(\frac{1}{3}a + 1\right)^2$

$4a^2 - 8a + 4 = (2a-2)^2$

(4) *Ausklammern vor der Anwendung einer binomischen Regel*:
$ca^2 + c\cdot2ab + cb^2 = c\cdot(a+b)^2$

$2a^2 - 4ab + 2b^2 =$
$2(a^2 - 2ab + b^2) =$
$2(a-b)^2$

Beachte:
Auch das Ausklammern von -1 bedeutet Faktorisieren einer Summe!

Beispiel:
$x - y = (-1)(-x+y)$